《工业加热》1997 年第 5 期

感应电热设备的设计 (5)

汤景明　机械部西安电炉研究所（西安 710061）

Design of Induction Heating Equipment (5)

Tang Jingming

将式中参数代入式 (45)，整理后得出：

$$\oint_{abcda} \boldsymbol{H}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{H}\cdot l + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial R}\mathrm{d}R\cdot l - \boldsymbol{H}\cdot l$$

$$= \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial R}\mathrm{d}R\cdot l = \delta \mathrm{d}R\cdot l \qquad (46)$$

因为 $\delta = r\boldsymbol{E}$，代入式 (46) 则有：

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial R} = r\boldsymbol{E} = \delta \qquad (47)$$

另有，根据电磁感应定律，沿 *eabfe* 对电场强度 $\boldsymbol{E}$ 求线积分可得：

$$\oint_{eabfe} \boldsymbol{E}\mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial R}\mathrm{d}R\right)(R+\mathrm{d}R)\mathrm{d}\theta + \boldsymbol{E}R\mathrm{d}\theta$$

$$= -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \qquad (48)$$

整理式 (48) 后得出：

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial R} + \frac{\boldsymbol{E}}{R} = \mu_0\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \qquad (49)$$

此处 $-\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -\mu_0\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}R\mathrm{d}R\mathrm{d}\theta$

由式 (47) 有：

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial R}$$

将上式代入式 (49) 整理后得出：

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial R^2} + \frac{1}{R}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial R} = r\mu_0\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \qquad (50)$$

因为磁场强度和电场强度对时间成正弦变化，则 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 可用下面形式表达：

$$\dot{E} = \dot{E}_{\mathrm{m}}e^{\mathrm{j}\omega t} \qquad (51)$$

$$\dot{H} = \dot{H}_{\mathrm{m}}e^{\mathrm{j}\omega t} \qquad (52)$$

式中：$\omega = 2\pi f$；$\mathrm{j} = \sqrt{-1}$；$\dot{E}$ 和 $\dot{H}$ 为复数形式而 $\dot{E}_{\mathrm{m}}$ 和 $\dot{H}_{\mathrm{m}}$ 为其振幅值。

将式 (52) 代入式 (50)：

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{H}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}R^2} + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}H_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}R} = \mathrm{j}\omega\mu_0\mu r\dot{H}_{\mathrm{m}} \qquad (53)$$

设 $\omega\mu_0\mu r = 2k^2$，则 $k = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\mu r}{2}}$

将 k 值代入式 (53)：

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{H}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}R^2} + \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}\dot{H}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}R} - \mathrm{j}2k^2\dot{H}_{\mathrm{m}} = 0 \qquad (54)$$

由此处亦可导出“电流透入深度”的公式：

$$\Delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2\rho}{\omega\mu_0\mu}} = \sqrt{\frac{2\rho}{2\pi f\times 4\pi\times 10^{-7}\mu}}$$

$$= 503\sqrt{\frac{\rho}{\mu f}}\ \mathrm{m}$$

式 (54) 为磁场强度分布的基本方程式，求解可得出导体上任一点的 $\dot{H}$、并相应地求得该点的电流密度 $\dot{\delta}$，从而得知圆柱形导体中 $\dot{H}$ 与 $\dot{\delta}$ 所分布状态。

求解柱面波要应用贝塞尔函数，为把式 (54) 化成贝塞尔函数形式，将该公式乘以 $\frac{1}{\left(\sqrt{2\mathrm{j}}k\right)^2}$，则得出：

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{H}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\left(\sqrt{2\mathrm{j}}kR\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{2\mathrm{j}}kR}\cdot\frac{\mathrm{d}\dot{H}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\left(\sqrt{2\mathrm{j}}kR\right)} - \dot{H}_{\mathrm{m}} = 0$$

设 $\sqrt{2\mathrm{j}}kR = \dot{z}$，代入上式则有：

$$\frac{\mathrm{d}^2\dot{H}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\dot{z}^2} + \frac{1}{\dot{z}}\frac{\mathrm{d}\dot{H}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{d}\dot{z}} - \dot{H}_{\mathrm{m}} = 0 \qquad (55)$$

式 (55) 即为零阶变形贝塞尔函数，其通

汤景明：男、1936 年生、研究员级高级工程师。

（收稿：1997-02-25）

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

解为：

$$\dot{H}_m = C_1 J_0(\dot{z}) + C_2 N_0(\dot{z})$$
$$= C_1 J_0\left(\sqrt{2}\mathrm{j}kR\right) + C_2 N_0\left(\sqrt{2}\mathrm{j}kR\right) \quad (56)$$

将式 (56) 代入式 (47) 微分后得出：

$$\dot{\delta}_m = \sqrt{2}\mathrm{j}k\left[C_1 J_1\left(\sqrt{2}\mathrm{j}kR\right) - C_2 N_1\left(\sqrt{2}\mathrm{j}kR\right)\right] \quad (57)$$

此式为一阶变形贝塞尔函数之解。

已知零阶和一阶贝塞尔函数，当 $R=0$ 时，$N_0(0)=N_1(0)=-\infty$，即 $\dot{H}_m$ 和 $\dot{\delta}_m$ 的回波为无限大，这是没有物理意义的，所以只能是 $C_2=0$。而当 $R=R_0$ 时，$\dot{H}_m=\dot{H}_{mo}=C_1 J_0\left(\sqrt{2}\mathrm{j}kR_0\right)$ 从而得出：

$$C_1 = \frac{\dot{H}_{mo}}{J_0\left(\sqrt{2}\mathrm{j}kR_0\right)} \quad (58)$$

将 C_1 和 C_2 值分别代入式 (56) 和式 (57)，则：

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{mo}\frac{J_0\left(\sqrt{2}\mathrm{j}kR\right)}{I_0\left(\sqrt{2}\mathrm{j}kR_0\right)} \quad (59)$$

$$\dot{\delta}_m = \sqrt{2}\mathrm{j}k\dot{H}_{mo}\frac{J_1\left(\sqrt{2}\mathrm{j}kR\right)}{I_0\left(\sqrt{2}\mathrm{j}kR_0\right)} \quad (60)$$

为了计算上的方便，可以分成虚、实两部分：

$$\dot{H}_m = \dot{H}_{mo}\frac{\mathrm{ber}\left(\sqrt{2}kR\right)+\mathrm{jbei}\left(\sqrt{2}kR\right)}{\mathrm{ber}\left(\sqrt{2}kR_0\right)+\mathrm{jbei}\left(\sqrt{2}kR_0\right)} \quad (61)$$

$$\dot{\delta}_m = \sqrt{2}k\dot{H}_{mo}\frac{\mathrm{ber}'\left(\sqrt{2}kR\right)+\mathrm{jbei}'\left(\sqrt{2}kR\right)}{\mathrm{ber}\left(\sqrt{2}kR_0\right)+\mathrm{jbei}\left(\sqrt{2}kR_0\right)} \quad (62)$$

其模数形式为：

$$\left|\dot{H}_m\right| = H_m = H_{mo}\sqrt{\frac{\mathrm{ber}^2 z+\mathrm{bei}^2 z}{\mathrm{ber}^2 z_0+\mathrm{bei}^2 z_0}} \quad (63)$$

$$\left|\dot{\delta}_m\right| = \delta_m = \sqrt{2}\frac{H_{mo}}{\Delta}\sqrt{\frac{\mathrm{ber}'^2 z+\mathrm{bei}'^2 z}{\mathrm{ber}^2 z_0+\mathrm{bei}^2 z_0}} \quad (64)$$

因为 $R\to R_0$ 时，$z\to z_0$，$\delta_m\to\delta_{mo}$，则有

$$\delta_{mo} = \sqrt{2}\frac{H_{mo}}{\Delta}\sqrt{\frac{\mathrm{ber}'^2 z_0+\mathrm{bei}'^2 z_0}{\mathrm{ber}^2 z_0+\mathrm{bei}^2 z_0}} \quad (65)$$

由式 (64) 和式 (65) 得出：

$$\delta_m = \delta_{mo}\sqrt{\frac{\mathrm{ber}'^2 z+\mathrm{bei}'^2 z}{\mathrm{ber}'^2 z_0+\mathrm{bei}'^2 z_0}} \quad (66)$$

下面，对式 (63) 和式 (66) 的两种极限情况进行分析：

(a) 当电流频率很高时，该时 $\frac{R}{\Delta}$ 值由于 Δ 的减小而变得很大。当 $z_0=\frac{\sqrt{2}R_0}{\Delta}\geqslant 6$ 时，公式中的 $\mathrm{ber}^2 z+\mathrm{bei}^2 z\approx\mathrm{ber}'^2 z+\mathrm{bei}'^2 z\approx\frac{e^{\sqrt{2}z}}{2\pi z}$，代入式 (63)、式 (66) 得出：

$$H_m = H_{mo}\sqrt{\frac{e^{\sqrt{2}(z-z_0)}}{\frac{z}{z_0}}} = H_{mo}\frac{e^{\frac{R-R_0}{\Delta}}}{\sqrt{\frac{R}{R_0}}} \quad (67)$$

$$\delta_m = \delta_{mo}\sqrt{\frac{e^{\sqrt{2}(z-z_0)}}{\frac{z}{z_0}}} = \delta_{mo}\frac{e^{\frac{R-R_0}{\Delta}}}{\sqrt{\frac{R}{R_0}}} \quad (68)$$

因为 $R-R_0=-x$，代入上两式得出：

$$H_m = H_{mo}\frac{e^{-\frac{x}{\Delta}}}{\sqrt{1-\frac{x}{R_0}}} \quad (69)$$

$$\delta_m = \delta_{mo}\frac{e^{-\frac{x}{\Delta}}}{\sqrt{1-\frac{x}{R_0}}} \quad (70)$$

当接近极限情况，即 $f\to\infty$，$z\to\infty$ 时，$\frac{x}{R_0}\to 0$，则有：

$$H_m = H_{mo}e^{-\frac{x}{\Delta}} \quad (71)$$

$$\delta_m = \delta_{mo}e^{-\frac{x}{\Delta}} \quad (72)$$

式 (71) 和式 (72) 与无限厚导体中平面波的公式是一致的。可以认为，在频率足够高时，柱面波表现出与平面波相似的电磁过程。

(b) 当电流频率很低时，$\frac{R}{\Delta}$ 值变小。如当

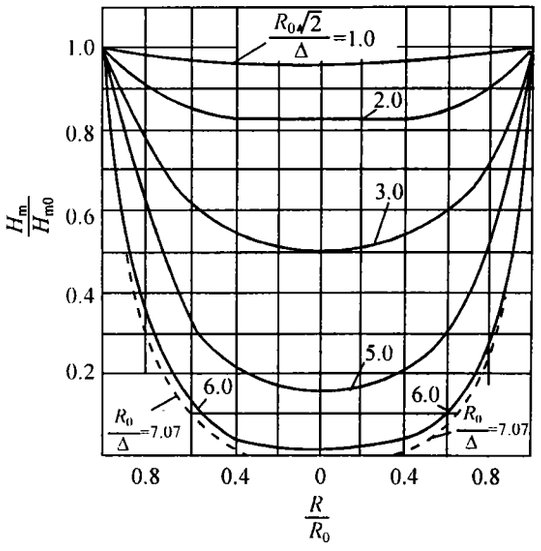
© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$z_0 \leqslant \sqrt{2}$ 时，$\mathrm{ber}^2 z + \mathrm{bei}^2 z \approx 1$，$\mathrm{ber}'^2 z + \mathrm{bei}'^2 z \approx \frac{z^2}{4}$，代入式 (63) 和式 (66) 得出：

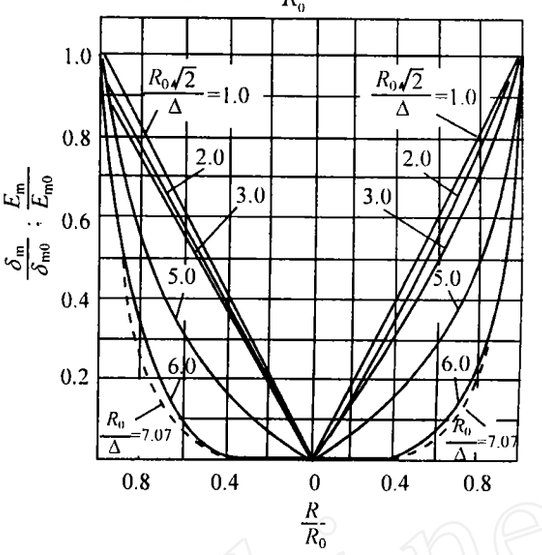
$$H_m \approx H_{m0} \tag{73}$$

$$\delta_m = \delta_{m0}\left(1 - \frac{x}{R_0}\right) \tag{74}$$

可按式 (63) 和式 (66) 绘制出磁场和电流密度在不同的 z_0 值时对 $\frac{R}{R_0}$ 的关系曲线，见图20。



(a) 磁场强度 H_m 的分布



(b) 电流密度 δ_m 的分布

图 20 纵向磁场中圆柱形导体上 H_m 和 δ_m 沿导体截面的分布

从图 20a 上可看出，纵向磁场中的圆柱形导体，在高频状态下与波在无限厚平面导体中传播一样，存在着明显的表面效应。随着频率的降低，磁场穿透加深，分布趋于均匀，最后，当 $f \to 0$ 时，即 $z_0 \approx 1$ 时，基本上达到均布。图 20b 显示出电流密度的分布，高频时表面效应十分明显，随着频率的下降，电流分布也有向导体内扩展的趋势，但导体中心处的电流密度始终为零。故在极限情况下，即 $f \to 0$，$z_0 \to 1$ 时，电流密度的分布为一由表至里连接最大值和零值的一条直线。因此，电流透入深度“Δ”的概念，对圆柱形导体而言，只有在频率足够高时才具有真实的物理意义；而当频率低到一定值时，“Δ”已成为一个纯数学量，不再能反映电流和能量在导体里的分布状态。换一种方式说，随着电流频率的降低，电流透入层加深，沿导体截面温度分布趋于均匀，但存在一个极限值，进一步降低频率已不能扩大加热层，即如果没有热能在导体内的传递，靠降低频率增大电流透入深度，永远也得不到沿截面均匀的加热。

为弥补“电流透入深度”表征加热状态的不足，引入了“有效加热层”的概念。“Δ”小于有效加热层“ξ”时，$\xi = \Delta$，而当 $\Delta > \xi$ 时，则“Δ”已无任何意义，只能按“ξ”来研究加热效果。

有效加热层“ξ”是指导体上由表至里的某一深度层，在该层中吸收了全部能量的 86.5%。

下面定量地讨论 ξ 和 f 以及 Δ 的关系。

图 21 为处于纵向磁场中圆柱形导体的截

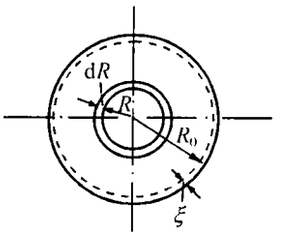


图 21 导体的有效加热层

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

面。取其上任一薄层 dR，写出此层上单位长度导体中吸收的功率：

$$\begin{aligned} dP^{(1)} &= \frac{1}{2}(dI_m)^2 \frac{\rho \times 2\pi R}{dR \times 1} \\ &= \frac{1}{2}(\delta_m dR \times 1)^2 \rho \frac{2\pi R}{dR \times 1} \\ &= \pi \rho \delta_m^2 R dR \end{aligned} \tag{75}$$

单位长度圆柱体上吸收的全部功率为：

$$P^{(1)} = \int_0^{R_0} dP^{(1)} = \pi\rho \int_0^{R_0} \delta_m^2 R dR \tag{76}$$

当频率偏低，即 $z = \frac{\sqrt{2}R}{\Delta} < 1$ 时，$\delta_m \approx \frac{H_{m0}}{\Delta_2^2} R$，代入式 (76) 得出：

$$P^{(1)} = \pi\rho \frac{H_{m0}^2}{\Delta^4} \int_0^{R_0} R^3 dR = \frac{\pi\rho H_{m0}^2}{4} \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^4 \tag{77}$$

在单位长度上有效加热层中吸收的功率为：

$$\begin{aligned} P_\xi^{(1)} &= \pi\rho \frac{H_{m0}^2}{\Delta^4} \int_{R_0-\xi}^{R_0} R^3 dR \\ &= \frac{\pi\rho H_{m0}^2}{4} \left(\frac{R_0}{\Delta}\right)^4 \left[1 - \left(1 - \frac{\xi}{R_0}\right)^4\right] \\ &= P^{(1)} \left[1 - \left(1 - \frac{\xi}{R_0}\right)^4\right] \end{aligned} \tag{78}$$

根据有效加热层的定义可写出：

$$\frac{P_\xi^{(1)}}{P^{(1)}} = \left[1 - \left(1 - \frac{\xi}{R_0}\right)^4\right] = 0.865$$

$$\left(1 - \frac{\xi}{R_0}\right)^4 = 0.135$$

从而得到

$$\frac{\xi}{R_0} \approx 0.4 \tag{79}$$

从上面导出的结论可看出，$\xi = 0.4R_0$ 为有效加热层的极限值。在高频状态下，即 $\frac{\Delta}{R_0} < 0.4$ 时，$\xi = \Delta$，而在 $\frac{\Delta}{R_0} \geqslant 0.4$ 时，$\xi = 0.4R_0$。可作出 $\frac{\xi}{R_0}$ 对 $\frac{\Delta}{R_0}$ 的关系曲线 (图 22)。

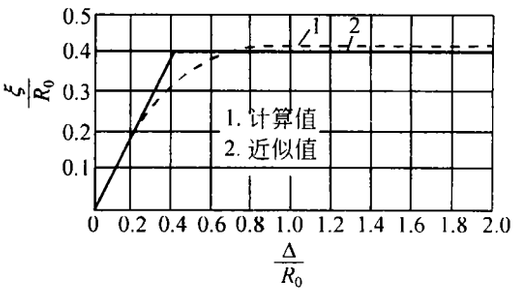


图 22 圆柱导体上有效加热层与频率的关系

由此图更可明显地看出，过多的降低频率，即当 $\frac{\Delta}{R_0} > 0.4$ 时，已不能进一步改善电流沿导体截面的均布状态。加热深度的极限值即为 $0.4R_0$。

—待续—

WZ972413 高温冶金设备用的碳素复合材料 —— Металлург，1996，No.11，18～21（俄）

详细介绍了碳素复合材料的物理-机械性能和热物理性能及生产工艺。这种用碳纤维加强的石墨复合材料在高温冶金设备中的最高使用温度达 3 000 ℃。介绍了上述材料工件的制造工艺及应用领域，包括宇航工业。图 6 表 1 参 4 [王承芳摘]

WZ972414 伏尔加汽车内接头外壳整体冷冲压和化学热处理工艺——Металловедение и Термическая Обработка Металлов，1996，No.11，18～21（俄）

首先叙述了伏尔加汽车内接头整体冲压工艺及冲压机床结构，然后详细叙述了内接头外套化学热处理工艺过程，即渗碳和退火。给出了内接头外壳渗碳的各项工艺参数和渗碳层微观组织。图 6 表 1 参 3 [王承芳摘]

WZ972415 低能耗马弗炉内高速钢工具的真空碳氮共渗—— Металловедение и Термическая Обработка Металлов，1996，No.4，6～8（俄）

首先简单介绍了真空化学热处理的优点，详细叙述了真空碳氮共渗设备的结构及其工艺过程，并给出了几种牌号高速钢工具碳氮共渗后扩散层的微观组织。表 5 图 3 参 14 [王承芳摘]

© 1994-2008 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net